מבוא לגאומטריה אלגברית - תרגיל 3

אם לא נאמר אחרת, F שדה סגור אלגברית וכל הקבוצות האלגבריות הן מעל השדה F.

שאלה 1. נניח $F=\mathbb{C}$ ונגדיר $X=\{y^2=x^3-x^2\}\subseteq\mathbb{A}^2$.

א) הראו כי כל הנקודות של X חוץ מ-$(0,0)$ הן חלקות וכי $(0,0)$ נקודה סינגולרית.

ב) מצאו איזומורפיזם בירציונלי $f:\mathbb{A}^1\dashrightarrow X$. הסבירו מדוע ה-$f$ שמצאתם הוא איזו בירציונלי (למשל ע"י מציאת "הופכי" $g:X\dashrightarrow\mathbb{A}^1$).

הדרכה: לכל $t\in F$, נגדיר את L_t להיות הישר עם שיפוע t העובר דרך $P=(0,0)$. הישר L_t חותך את X בנקודה נוספת Q_t. הגדירו $f(t)=Q_t$.

שאלה 2. תהי $X\subseteq\mathbb{A}^n$ קבוצה אלגברית אי-פריקה ויהיו $X_1,\dots,X_n\subseteq\mathbb{A}^n$ קבוצות אלגבריות כך ש-$X=X_1\cup\dots\cup X_n$. הוכיחו שקיים $1\le i\le n$ כך ש-$X=X_i$.

שאלה 3: יהי $X=\{x_2^2=x_1^4-1\}\subseteq\mathbb{A}^2$.

א) הראו כי X חלק.

ב) מצאו $\bar{X}\subseteq\mathbb{P}^2$ כך ש-$X=\bar{X}^{aff,0}$.

ג) מצאו את $\bar{X}^{aff,2}$ ואת כל הנקודות הסינגולריות שלו. (הסיקו כי X אמנם חלק, אבל בעל נקודות סינגולריות ב"אינסוף".)

שאלה 4. תהי $X\subseteq\mathbb{P}^n$ קבוצה אלגברית פרוייקטיבית.
נניח כי $X^{aff,0}$ ו-$X^{aff,1}$ לא ריקות ואי פריקות ונגדיר העתקה בירציונלית $\varphi:\mathbb{A}^n\dashrightarrow\mathbb{A}^n$ ע"י

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{x_1},\frac{x_2}{x_1},\dots,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

א) הראו כי f מגדירה העתקה בירציונלית $\varphi:X^{aff,0}\dashrightarrow X^{aff,1}$.

ב) מצאו $\psi:X^{aff,1}\dashrightarrow X^{aff,0}$ כך ש-$\varphi\circ\psi\sim id$ ו-$\psi\circ\varphi\sim id$. הסיקו כי φ איזו בירציונלי.